PROBLEME (10 points)

On donne dans le plan orienté, un triangle OAB tel que : OA=2OB et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ (On prendra log[OA] = 8 cm).Soient J et K les milieux respectifs des segments [OA] et [OB]. On désigne par A' le symetrique de O par rapport à B, I le symetrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur (AB).

A- Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Préciser r(A) et r(B)

2/ Soit G = r(H).

a- Montrer que G appartient à (IA') et que (OG) ⊥ (IA') .

b- Construire alors le point G.

B- Soit s la similitude directe qui tronsforme O en A et B en O.

1/a- Déterminer le rapport et l'angle de s.

b- montrer que le centre de s est le point H.

c- Montrer que s(K) = J; en déduire que (HK) ⊥ (HJ).

2/ la perpendiculaire en A à (OA) coupe la droite (HK) en C.

a- Montrer que s((OA)) = (AC).

b- En déduire que s(J) = C.

c- Montrer alors que HC = OA = AC.

C- Soit $h = s \circ r^{-1}$. on désigne par L le symetrique de O par rapport à I.

1/a- Déterminer h(I) et h(O).

b- Montrer que h est une homothétie et déterminer son rapport .

c- Montrer que h a pour centre le point L .

2/a- Déterminer l'image de G par $s \circ r^{-1}$.

b- En déduire que G est le milieu de [LH].

c- Montrer que LHA' est un triangle rectangle .

D- On désigne par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les paraboles de même foyer H et de directrices repectives (OB) et (OA).

1/a-Montrer que les points J et K appartiennent respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$

b- Montrer que (JK) est une tangente commune à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

2/a- Montrer que le point C est un point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

b- Soit S le sommet de $\mathscr{P}'$. Montrer que S appartient à $\mathscr{P}$

Tracer $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

3/ Soit M un point du plan et M' son image par s.

Montrer que M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si M' appartient à $\mathscr{P}'$.